

Лекция 4. Векторлық және аралас көбейтінділер. Векторлардың векторлық көбейтіндісі.

Векторлардың сызықтық тәуелділігі. Базис

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ векторлар жүйесі берілсін.

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ векторлар жүйесі үшін бәрі бірдей нөлге тең емес және

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = 0 \quad (3.1)$$

теңдігін қанағаттандыратын $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ сандары табылса, онда $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ векторларын **сызықтық тәуелді векторлар** деп атайды. Ал егер (3.1) теңдік тек $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ сандарының барлығы бірдей нөлге тең болғанда ғана орындалса, онда $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ векторлар жүйесі **сызықтық тәуелсіз** деп аталады.

Егер $\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$ теңдігі орындалатын $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ сандары табылса, онда $\vec{b}$ векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ векторларының **сызықтық комбинациясы** деп аталады.

Теорема. Екі вектор сызықтық тәуелді болуы үшін олардың өзара коллинеар болуы қажетті және жеткілікті.

Бұл теоремадан кез келген коллинеар емес **екі вектор сызықтық тәуелсіз** болады деген қорытынды шығады.

Векторды координат өстердің орттары арқылы жіктеу. Вектордың модулі. Кеңістіктегі тік бұрышты декарттық Ox, Oy, Oz координаталар жүйесін қарастырайық. Ox, Oy, Oz координат өстерінің бойында жатқан бірлік (орт) векторларды сәйкесінше $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ деп белгілейік. Сонда реттелген үштік $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ кеңістікте базистік векторлар жүйесін құрайды. Мұндай, базистік векторлар жүйесін ортогональ базистік жүйе (базис) деп атайды ($\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$). $\vec{a} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, себебі үш вектордың қосындысы.

Бұл формула $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ **вектордың координат өстерінің орттары арқылы жіктелген** түрі деп аталады немесе қысқаша $\vec{a} = (x, y, z)$ деп жазады.

Анықтама. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының **векторлық көбейтіндісі** деп, келесі үш шартты қанағаттандыратын $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ векторын айтады:

- 1) $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$;
- 2) $\vec{c}$ векторының ұзындығы $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларына тұрғызылған параллелограммның ауданына тең, яғни $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$, мұндағы $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$;
- 3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлары оң үштік құрайды.

Векторлық көбейтінді $\vec{a} \times \vec{b}$ деп белгіленеді.

Векторлық көбейтіндінің қасиеттері:

1. $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$;
2. $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$;
3. Нөлдік емес $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары $\vec{b} \times \vec{a} = 0$ жағдайда ғана колинеар;
4. $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b} = \vec{a}_1 \times \vec{b} + \vec{a}_2 \times \vec{b}$.

Теорема. Егер $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ базисінде $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ векторлары берілсе, онда

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}.$$

1-мысал. $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (4, 5, 6)$ векторларының векторлық көбейтіндісін табу керек.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i}(2 \cdot 6 - 3 \cdot 5) - \vec{j}(1 \cdot 6 - 3 \cdot 4) + \vec{k}(1 \cdot 5 - 2 \cdot 4) = -3\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k} = (-3, 6, -3).$$

Векторлардың аралас көбейтіндісі

Анықтама. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісі деп, $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісі мен $\vec{c}$ векторының скаляр көбейтіндісін айтады. $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Аралас көбейтінді $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ немесе $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$ түрінде жазылады. Аралас көбейтіндінің нәтижесі санға тең.

Аралас көбейтіндінің қасиеттері:

1. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$;
2. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$;
3. $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = -\vec{a} \vec{c} \vec{b} = \vec{c} \vec{a} \vec{b} = -\vec{c} \vec{b} \vec{a} = \vec{b} \vec{c} \vec{a} = -\vec{b} \vec{a} \vec{c}$;
4. Егер векторлар $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланар болса, онда $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$.

Теорема. $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ базисінде $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ векторлары берілсін, онда олардың аралас көбейтіндіні анықтауыш түрінде жазуға болады.

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Аралас көбейтіндінің қолданылуы

1. Егер $\vec{a} \vec{b} \vec{c} > 0$ болса, онда $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - оң үштік; егер $\vec{a} \vec{b} \vec{c} < 0$ болса, онда $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - сол үштік құрайды.
2. $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлары компланар.
3. $V_{\text{нар}} = |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|$, $V_{\text{нур}} = \frac{1}{6} |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|$.